

Gnumeric: электронная таблица для всех

И.А.Хахаев, © 2007-2010

7 Линейная оптимизация (поиск решения)

7.1 Оптимизация как задача линейного программирования

Пусть имеется функция, называемая целевой, линейно зависящая от некоторых переменных (факторов).

$$f(X) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \quad (1)$$

В данном случае X – вектор неизвестных (значений факторов).

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

Значения неизвестных находятся из системы m линейных ограничений, которая может содержать как уравнения, так и неравенства.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3)$$

При этом вводится дополнительное условие неотрицательности значений переменных.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (4)$$

Неотрицательное решение системы (3), то есть вектор X при соблюдении условий (3) и (4) называется «планом задачи».

План X' называется оптимальным планом задачи минимизации (минимизации), если для любого плана X выполняются условия

$$f(X') \geq f(X) \quad (f(X') \leq f(X)) \quad (5)$$

Таким образом, поскольку решение задачи линейного программирования сводится к нахождению оптимального плана и вычислению максимального (минимального) значения целевой функции, такие задачи также называют задачами линейной оптимизации.

В современных офисных электронных таблицах для решения подобных задач имеется модуль «Solver» («Поиск решения»). Далее рассмотрим пример решения задачи линейной оптимизации в Gnumeric.

7.2 Пример задачи линейной оптимизации

Для разбора предлагается задача, взятая из учебного пособия «Математическое программирование», авторы Э.Ф.Брыжина и Э.А.Худобина, издательство СПбГИЭА, 1997 год.

Задача: Имеется три вида сырья в количествах 45 ед., 19 ед. и 10 ед. Из этого

сырья нужно изготовить продукцию двух видов. Задан расход сырья каждого вида на производство единицы каждого вида продукции и прибыль от единицы продукции (см. таблицу). Требуется найти такой вариант выпуска каждого вида продукции, при котором прибыль будет наибольшей.

Таблица исходных данных для задачи.

Продукция	Продукт 1	Продукт 2	Запасы сырья
Сырье			
1	5	9	45
2	3	3	19
3	2	1	10
ПРИБЫЛЬ	5	6	

(Далее – абзац по тексту источника) Обозначим через x_1 количество единиц продукции первого вида, через x_2 – второго вида. Тогда на выпуск этой продукции будет израсходовано $5x_1 + 9x_2$ ед. сырья первого вида, $3x_1 + 3x_2$ ед сырья второго вида и $2x_1 + x_2$ - третьего. Суммарная прибыль составит $5x_1 + 6x_2$ денежных единиц. Т.к. нельзя израсходовать сырья больше, чем имеется, а суммарная прибыль зависит от количества выпущенной продукции, то получим следующую математическую модель данной задачи.

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \leq 45, \\ 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 19, \\ 2 \cdot x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

7.3 Решение в Gnumeric

Для решения задачи в ЭТ прежде всего нужно определиться с расположением исходных данных и составить необходимые формулы. Пусть таблица будет скомпонована в соответствии с рис. 7.1.

	А	В	С	Д
1				
2	Продукт1	Продукт2	Прибыль	
3			0	
4				
5	Ограничения:			
6	для сырья1	0		
7	для сырья2	0		
8	для сырья3	0		

Рисунок 7.1. Исходные данные для поиска решения

Количества продукции 1-го и 2-го вида (которые предстоит вычислить) располагаются в ячейках А3 и В3 соответственно. В ячейку С3 записывается формула для вычисления прибыли, в ячейки В6:В8 – формулы для левых частей ограничений (см. математическую модель). Когда решение будет найдено, нули будут заменены какими-то другими значениями.

Далее вызываем модуль поиска решения (в главном меню «Сервис/Поиск решения...», рис. 7.2).

В диалоге поиска решения несколько вкладок, и в них потребуется устанавливать значения элементов ввода. На вкладке «Параметры» (рис. 7.2) требуется указать ячейку, содержащую формулу для целевой функции $f(x)$, а также ячейки, в которых должны вычисляться параметры (в нашем случае x_1 и x_2). Заполним эту вкладку в соответствии с расположением исходных данных. Поскольку требуется найти максимум прибыли, установим переключатель «Равняется:» в позицию «Макс».

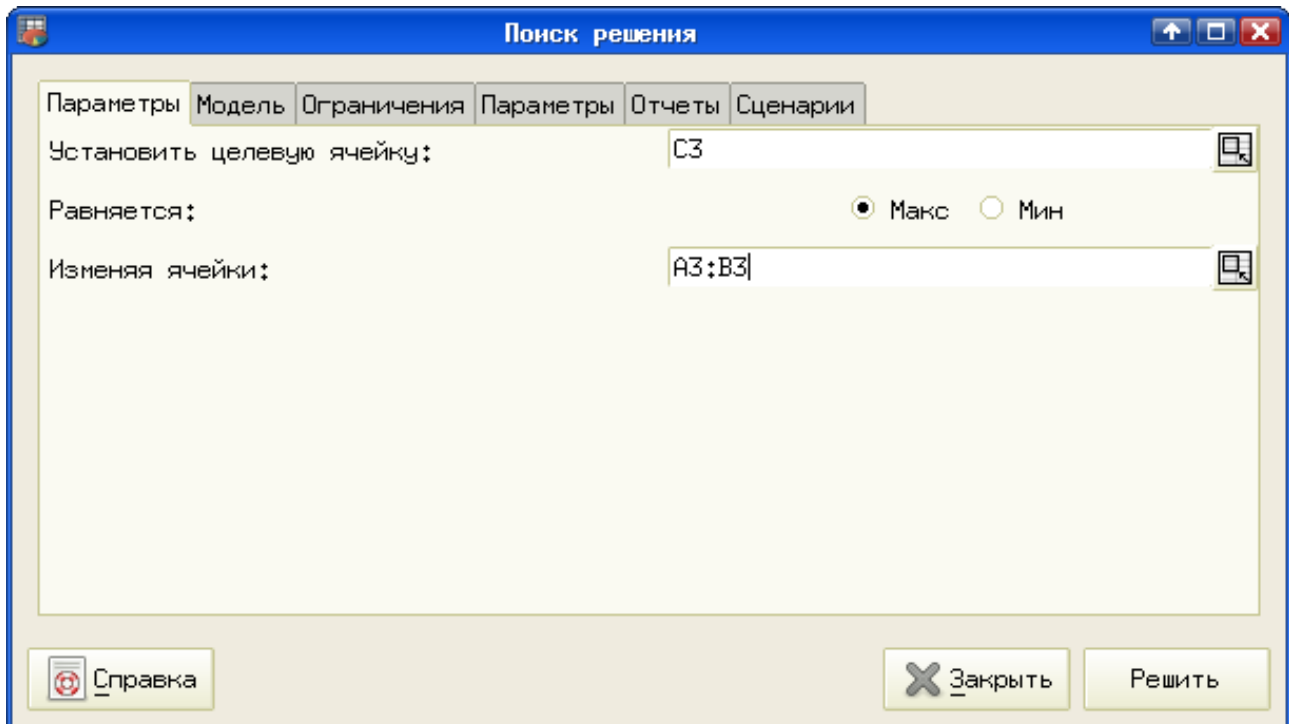


Рисунок 7.2. Диалог поиска решения в Gnumeric (Solver)

Адреса ячеек, содержащих целевую функцию и значения факторов, можно вписывать вручную, а можно указывать мышью, используя кнопку «свернуть/развернуть диалог» справа от полей ввода.

На следующей вкладке («Модель») устанавливаем значения в соответствии с рис. 7.3. Ключ «Проверить неотрицательность» («Assume Non-negative») как раз и означает, что искать нужно только положительные решения. В самом деле, количество продукции не может быть отрицательным.

Выбор алгоритма и вида модели влияет на результат и саму возможность существования решения, так что для задач линейного программирования нужно использовать установки, показанные на рис. 7.3.

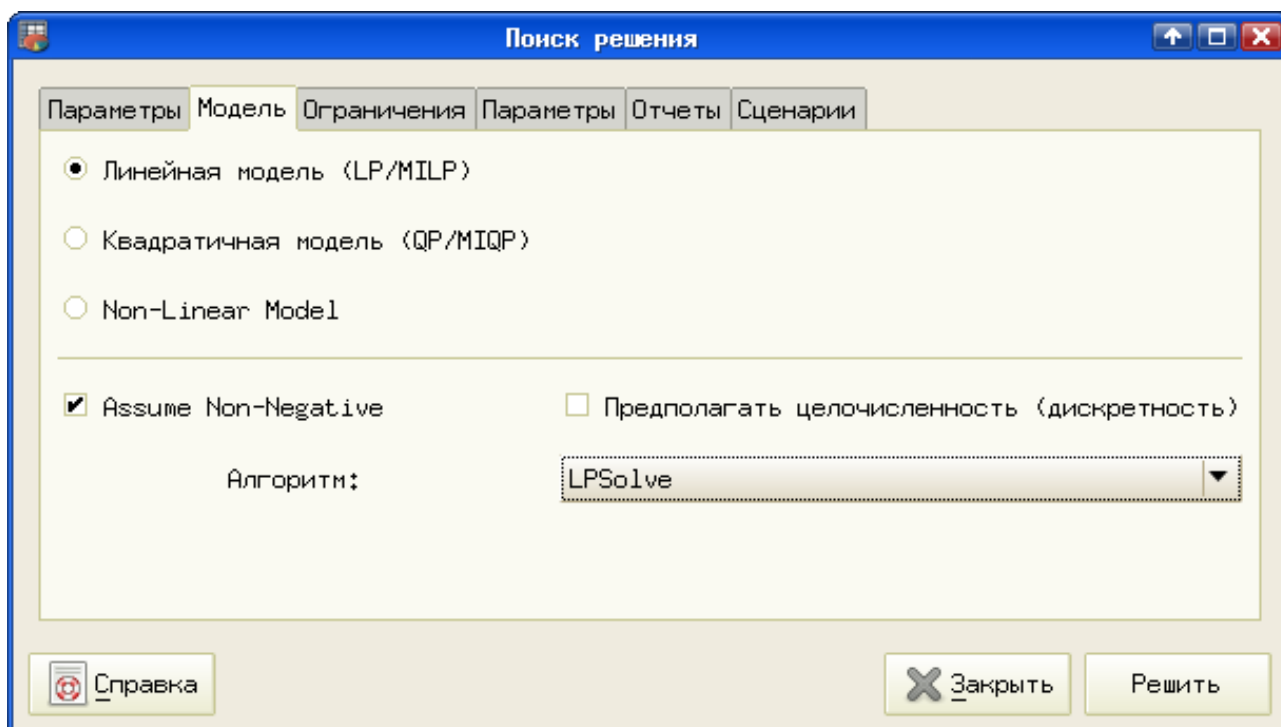


Рисунок 7.3. Определение вида модели

Следующая вкладка («Ограничения») позволяет задать ограничения для параметров модели. Здесь важно, что левая и правая часть ограничений задаются как адреса ячеек, содержащих формулы и значения. После того, как определены ячейка для левой части и значение для правой части ограничения и выбран знак отношения («Тип»), нажатием на кнопку «Добавить» условие добавляется (рис. 7.4).

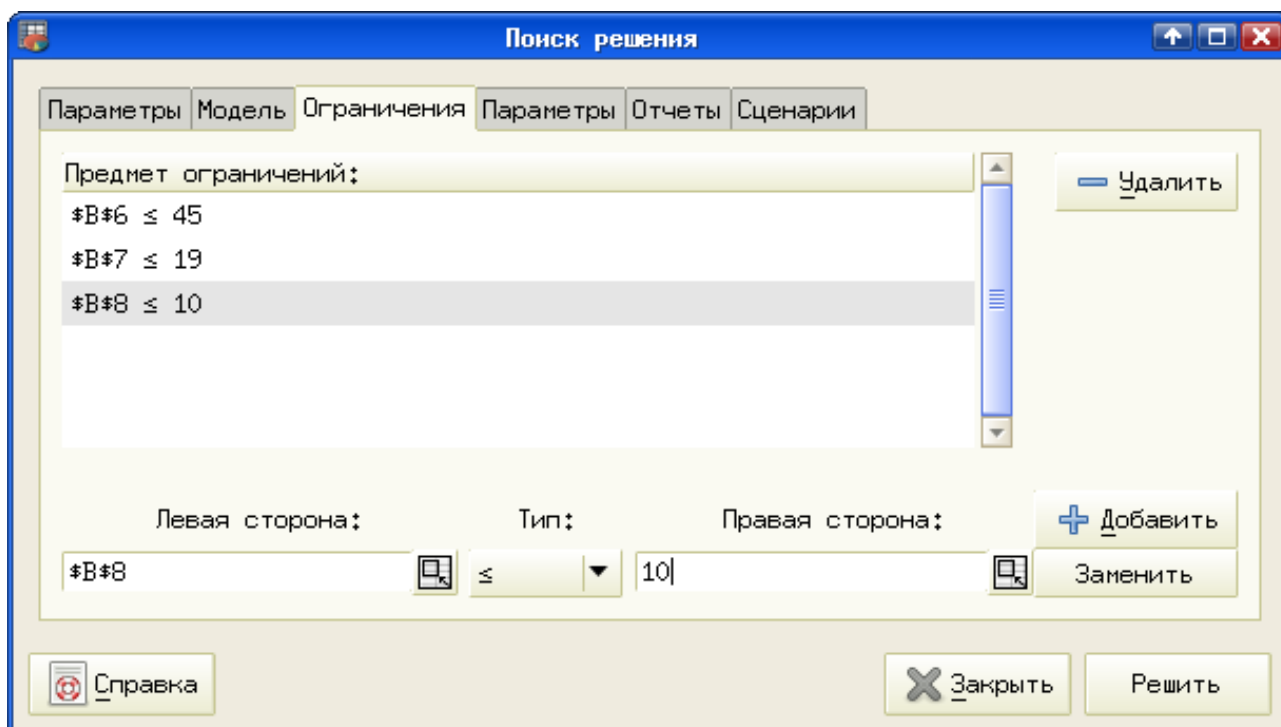


Рисунок 7.4. Определение ограничений

Для правой части ограничений можно использовать как конкретные значения, так и адреса ячеек, содержащих эти значения.

Остальные настройки вкладки не играют существенной роли в решении задачи, поэтому после ввода всех ограничений нажимаем на кнопку «Решить» и получаем сообщение о результате решения (рис. 7.5). Если чего-то не хватает или выбраны неверная модель или алгоритм, выводится соответствующее сообщение об ошибке.

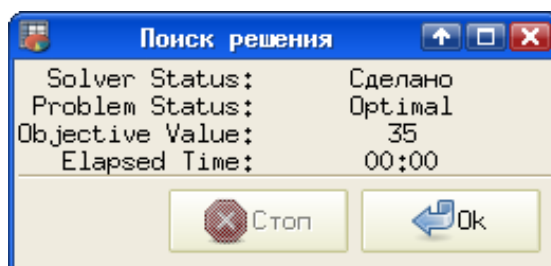
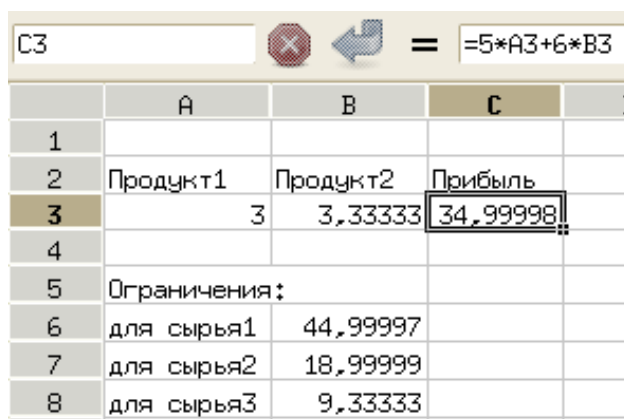


Рисунок 7.5. Результат решения

Значение «Objective value» соответствует полученному в результате решения значению целевой функции, а вычисленные значения переменных и результирующие значения ограничений появляются вместо исходных данных на листе таблицы, как показано на рис. 7.6.



	A	B	C	I
1				
2	Продукт1	Продукт2	Прибыль	
3	3	3,33333	34,99998	
4				
5	Ограничения:			
6	для сырья1	44,99997		
7	для сырья2	18,99999		
8	для сырья3	9,33333		

Рисунок 7.6. Найденное решение

Нужно отметить, что результаты полностью соответствуют приведенным в первоисточнике значениям 3 и $10/3$.

В качестве эксперимента попробуйте в диалоге настройки модели для этих же исходных данных установить режим «Предполагать целочисленность (дискретность)».